الفصل السادس

الجريانات الارتشاحية للسائل القابل للانضغاط في الوسط المسامي حسب قانون الارتشاح الخطي

درسنا في الفصل الرابع الجريانات الارتشاحية للسائل غير القابل للانضغاط وتنعكس عدم قابلية السائل للانضغاط بثبات كثافته ، حيث اعتبرنا أن الكثافة ثابتة على امتداد الطبقة ، ومثل هذه الحالة تحدث عند نظام الدفع المائي مع اعتبار أن كمية الغاز المنحل تبقى ثابتة في النفط ، ولكن في الواقع يلاحظ أنه كلما اقترب السائل من البئر ونتيجة لانخفاض الضغط ، فإن السائل يتمدد وهذا يؤدي إلى تغير في كثافته على امتداد الطبقة.وهنا سنجري الحسابات نفسها ولكن بعد إدخال عامل الكثافة في معادلة الحالة ، وبدلاً من استخدام السرعة الحجمية فإننا سنأخذ السرعة الوزنية ، أي أن :

$$v_M = \rho . v \, , \; Q_M = \rho . Q \qquad (٦-١)$$

حيث إن : v_M ـ السرعة الوزنية ، v ـ السرعة الحجمية ، Q_M ـ التدفق الوزني ، Q ـ التدفق الحجمي ، ρ ـ كثافة السائل .

سبق ودرسنا قانون تغير الكثافة الذي أعطي بالمعادلة (٣-٢٦) ، حيث يمكن كتابتها على الشكل التالي ، بعد أخذ لوغاريتم الطرفين :

$$P = P_{at} + \frac{1}{\beta} \ln \frac{\rho}{\rho_{at}} \qquad (٦-٢)$$

وبناء على ماسبق سنقوم بدراسة الجريان الأحادي المنتظم والجريان الدائري الشعاعي للسائل القابل للانضغاط كلٍ على حدة .

٦-١- الجريان الأحادي المنتظم المستقر :

سندرس هذا النوع من الجريان بناء على نفس الشكل (٤-٨-b) فقد قلنا إن كثافة

السائل سوف تتغير وسندرس تغيرها بالنسبة للمحور x وذلك باشتقاق المعادلة (٦-٢) :

$$\frac{dP}{dx} = \frac{1}{\beta}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{d\rho}{dx} \qquad (٦-٣)$$

وبتعويض قيمة v من المعادلة (٤-٣) في المعادلة (٦-١) نحصل على :

$$\rho \,.\, v = \rho\,\frac{k}{\mu}\,\frac{dP}{dx} \qquad (٦-٤)$$

وبتعويض المعادلة (٦-٣) في المعادلة (٦-٤) نحصل على :

$$\rho \,.\, v = \frac{k}{\beta \,.\mu}\,\frac{dP}{dx} \qquad (٦-٥)$$

وبأخذ بعين الاعتبار المعادلة (٦-١) وإدخال السطح F نحصل على :

$$d\rho = \frac{\beta.\mu.Q_M}{k\,.\,F}\,dx \qquad (٦-٦)$$

نكامل المعادلة عند الحدود $[\rho_g \rightarrow \rho]$ ، $[0 \rightarrow x]$ فنجد :

$$\rho = \rho_g + \frac{\beta.\mu.Q_M}{k\,.\,F}\,x \qquad (٦-٧)$$

وللحصول على الإنتاجية الوزنية Q_M ، نكامل المعادلة (٦- ٦) عند الحدود $[\rho_g \rightarrow \rho_k]$ ، $[0 \rightarrow L_k]$:

$$Q_M = \frac{k\,.\,F}{\beta\,.\,\mu}\,\frac{\rho_k - \rho_g}{L_k} \qquad (٦-٨)$$

وبتعويض قيمة Q_M في المعادلة (٦-٦) نحصل على :

$$\rho = \rho_g + \frac{\rho_k - \rho_g}{L_k}\,x \qquad (٦-٩)$$

إن المعادلات (٦-٧) ، (٦-٩) توضح تغير كثافة السائل من أية نقطة في الطبقة وحتى القناة . وللحصول على معادلة الضغط نقوم بتعويض قيمة الكثافة ρ ، التي حصلنا عليها بواسطة هذه المعادلات ، في المعادلة (٦-٢) . وانطلاقاً من المعادلة (٣-٢٤) تم الحصول على المعادلة (٣-٢٦) . وبكتابة المعادلة (٣-٢٦) بشكل سلسلة وأخذ الحدود الثلاث الأولى منها ، لأن الحدود الأخرى تعتبر صغيرة جداً ، فقد تم الحصول على العلاقة التالية :

$$\rho = \rho_o \left[1 + \beta(P - P_o) + \frac{1}{2} \beta^2 (P - P_o)^2 \right] \qquad (٦-١٠)$$

حيث إن : ρ_o ـ كثافة السائل في الشروط السطحية ، P_o ـ الضغط الجوي .

واعتماداً على المعادلة (٦-١٠) يمكن الحصول على مايلي :

$$\rho_k - \rho_g = \rho_o \cdot \beta \left(P_k - P_g \right) \left(1 + \beta \overline{P} \right) \qquad (٦-١١)$$

حيث إن : $\overline{P}$ ـ القيمة الوسطية للضغط فوق الضغط الجوي بين كونتور التغذية وضغط القناة وهو يساوي :

$$\overline{P} = \frac{P_k + P_g}{2} - P_o \qquad (٦-١٢)$$

ومن المعادلة (٦-١) نجد أن :

$$Q_o = \frac{Q_M}{\rho_o} \qquad (٦-١٣)$$

وبتعويض المعادلتين (٦-١١) ، (٦-١٣) في المعادلة (٦-٨) نحصل على:

$$Q_o = \frac{k \cdot F}{\mu} \frac{P_k - P_g}{L_k} \left(1 + \beta \overline{P} \right) \qquad (٦-١٤)$$

ومن أجل الحصول على معادلة تدرج الضغط نقوم باشتقاق المعادلة (٦-٩) بالنسبة إلى المحور x ، وبتعويض المعادلة (٦-١١) فيها نحصل على :

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{\rho_k - \rho_g}{L_k} \cong \frac{P_o \beta \left(P_k - P_g \right) \left(1 + \beta \overline{P} \right)}{L_k} \qquad (٦-١٥)$$

وبتعويض هذه المعادلة في المعادلة (٦-٣) نجد أن :

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\left(P_k - P_g \right) \left(1 + \beta \overline{P} \right)}{L_k} \qquad (٦-١٦)$$

من المعادلتين (٦-٤) ، (٦-٨) يمكن التوصل إلى :

$$Q = \frac{k \cdot F}{\beta \cdot \mu} \frac{\rho_k - \rho_g}{L_k} \frac{1}{\rho} \qquad (٦-١٧)$$

وبتقسيم قيمة الإنتاجية Q على سطح الارتشاح F يمكن الحصول على المعادلة التالية:

$$v = \frac{k}{\beta \cdot \mu} \frac{\rho_k - \rho_g}{L_k} \frac{1}{\rho} \qquad (٦-١٨)$$

وبتحليل هذه المعادلات التي تم التوصل إليهـا مـن أجـل هـذا النـوع مـن الجريـان يمكننا استخلاص الاستنتاجات التالية :

١) بمقارنـة المعـادلتين (٦-١٤) ، (٤-٧) تبـين أن كميـة السـائل المصروفـة عنـد الضغط الجوي Q_o للسائل القابل للانضغاط تختلف عن كمية السائل المصروفة للسائل غير القابل للانضغـاط ، عنـد الشـروط نفسـها ، بالقيمـة $(1 + \beta \bar{P})$ ، ولكـن قيمـة $(\beta \bar{P})$ صغيرة جـداً بالمقارنـة مـع الواحـد . فمثـلاً عندمـا يكـون $\beta = 5.10^{-5} \frac{1}{at}$ ، $\bar{P} = 100\ at$ فإن :

$\beta . \bar{P} = 5.10^{-3}$ ، لذلك يمكننا تعيين الكمية المصروفة للسـائل القـابل وغـير القـابل للانضغاط عند الشروط نفسها حسب المعادلة (٤-٧) والشكل (٤-٦) .

٢) بمقارنـة المعـادلتين (٦-١٦) ، (٤-٨) نلاحـظ تشـابههما بفـارق $(1+\beta\bar{P})$ وكما قلنا إن هذه القيمة صغيرة لذلـك فإن لتـدرج الضغـط قيمـة متسـاوية وثابتـة ، وبالتالي يمكن القول إن منحنيات تـوزع الضغـط في الطبقـة يجـب أن تكـون متطابقـة للسائل القابل وغير القابل للانضغاط كما في الشكل (٤-٦) .

٣) إن المعادلة (٦-١٨) تثبت أن سرعة الارتشـاح لاتتعلـق بـالمحور x وبمـا أن تغـير الكثافة صغير جداً لذلك يمكن اعتبارها ثابتة وبالتـالي فـإن سـرعة الارتشـاح سـتكون ثابتة على امتداد الطبقة كما هو موضح في الشكل (٤-٦) .

وأخيراً يمكننـا القـول إنـه يمكـن استخدام معـادلات تـوزع الضغـط للسـائل غـير القـابل للانضغاط عند إجراء الحسابات المخزونية الحقلية المتعلقة بارتشاح السائل القابل للانضغاط .

٦-٢- الجريان الدائري الشعاعي المستقر :

تعطى معادلة الحالة أثناء الجريان الدائري للسائل القابل للانضغاط حسـب قـانون الارتشاح الخطي بتعويض المعادلـة (٤-٢٦) في المعادلـة (٦-١) ، والشـكل رقـم (٤-١٢) يوضح المقطع الأفقي لهذا النوع من الجريان :

$$\rho \cdot v = \frac{k}{\mu} \rho \frac{dP}{dr} \qquad (١٩-٦)$$

وباشتقاق المعادلة (٦-٢) بالنسبة لنصف القطر r نجد :

$$\frac{dP}{dr} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dr} \qquad (٢٠-٦)$$

نعوض قيمة تدرج الضغط بالمعادلة (٦-١٩) فنحصل على :

$$\rho v = \frac{1}{\beta \cdot \mu} \frac{d\rho}{dr} \qquad (٢١-٦)$$

وبأخذ العلاقة (٦- ١) بعين الاعتبار وإدخال سطح الارتشاح $F = 2 \pi r b$ نجد:

$$d\rho = \frac{\beta \cdot \mu \cdot Q_M}{2 \pi k b} \frac{dr}{r} \qquad (٢٢-٦)$$

نكامل هذه المعادلة عند الحدود $[\rho_c \rightarrow \rho]$ ، $[R_c \rightarrow r]$:

$$\rho = \rho_c + \frac{\beta \cdot \mu \cdot Q_M}{2 \pi k b} \ell n \frac{r}{R_c} \qquad (٢٣-٦)$$

نكامل المعادلة (٦-٢٢) عند الحدود $[\rho_c \rightarrow \rho_k]$ ، $[R_c \rightarrow R_k]$ فنحصل على الإنتاجية الوزنية :

$$Q_M = \frac{2 \pi k b}{\beta \cdot \mu} \frac{\rho_k - \rho_c}{\ell n \frac{R_k}{R_c}} \qquad (٢٤-٦)$$

نعوض قيمة Q_M من المعادلة (٦-٢٤) في المعادلة (٦-٢٣) فنحصل على معادلة الكثافة وتغيرها مع تغير نصف القطر r :

$$\rho = \rho_c + \frac{\rho_k - \rho_c}{\ell n \frac{R_k}{R_c}} \ell n \frac{r}{R_c} \qquad (٢٥-٦)$$

يمكن الحصول على الكمية الحجمية المصروفة من السائل باستخدام المعادلة (٦-١) :

$$Q = \frac{2 \pi k b}{\beta \cdot \mu} \cdot \frac{(\rho_k - \rho_c)}{\ell n \frac{R_k}{R_c}} \cdot \frac{1}{\rho} \qquad (٢٦-٦)$$

وبتقسيم هذه الكمية على سطح الارتشاح نحصل على سرعة الارتشاح في أية نقطة من الطبقة :

$$v = \frac{k}{\beta \cdot \mu} \cdot \frac{(\rho_k - \rho_e)}{\ell n \frac{R_k}{R_e}} \cdot \frac{1}{\rho . r} \qquad (٢٧-٦)$$

أما الكمية الحجمية المصروفة من السائل عند الضغط الجوي يمكن الحصول عليها بتعويض قيمة كثافة النفط في الشروط السطحية ρ_o :

$$Q_o = \frac{2 \pi k b}{\beta \cdot \mu \rho_o} \frac{\rho_k - \rho_e}{\ell n \frac{R_k}{R_e}} \qquad (٢٨-٦)$$

وبالطريقة نفسها التي اتبعت في الفقرة السابقة يمكن الحصول على قيمة فرق الكثافة التي سوف تعطى بالعلاقة التالية :

$$\rho_k - \rho_e \cong \rho_o \beta (P_k - P_e)(1 + \beta \overline{P}) \qquad (٢٩-٦)$$

وبتعويض هذه المعادلة في المعادلة (٦-٢٨) نجد :

$$Q_o = \frac{2 \pi k b}{\mu} \frac{P_k - P_e}{\ell n \frac{R_k}{R_e}} (1 + \beta \overline{P}) \qquad (٣٠-٦)$$

نعوض قيمة $\frac{d\rho}{dr}$ من المعادلة (٦-٢٢) في المعادلة (٦-٢٠) ثم نعوض قيمة Q_M فيها أيضاً فنحصل على :

$$\frac{dP}{dr} = \frac{1}{\beta \cdot \rho} \frac{(\rho_k - \rho_e)}{\ell n \frac{R_k}{R_e}} \frac{1}{r} \qquad (٣١-٦)$$

مما سبق يمكن التوصل إلى الاستنتاجات التالية :

١) تختلف المعادلة (٦-٣٠) عن المعادلة (٤-٣٢) بالقيمة فقط $(1 + \beta \overline{P})$ وبما أننا قلنا إن هذه القيمة صغيرة جداً ، لذلك نستنتج إمكانية استخدام قانون ديوبي الموضح بالمعادلة (٤-٣٢) ، من أجل حساب كمية السائل المصروفة للسائل القابل وغير القابل للانضغاط والشكل (٤-١٣) يمثل الدليل البياني في الحالتين .

٢) بمقارنة المعادلة (٦-٣١) مع المعادلة (٤-٣٣) بعد تعويض المعادلة (٦-٢٩) فيها يمكن ملاحظة تطابقهما لأنه كما قلنا إن $(1 + \beta \overline{P}) \cong 1$ ، لذلك فإن منحنيات

توزع الضغط في الطبقة لدى الارتشاح الدائري الشعاعي للسائل القابل وغير القابل للانضغاط متطابقة كما في الشكل (٤-١٤) .

٣) إن معادلة سرعة الارتشاح (٦-٢٧) بعد تعويض (٦-٢٩) فيها تتطابق مع العلاقة (٤-٣٠) ، وهي تمثل معادلة قطع زائد . لذلك يمكن استخدام المعادلة (٤-٣٠) من أجل الجريان الدائري الشعاعي للسائل القابل وغير القابل للانضغاط ، وهذا موضح في الشكل (٤-١٤) .

مما ذكر نستنتج أن كل ماذكر في البندين الثاني والثالث من الفصل الرابع من استنتاجات حول شكل خطوط الإيزوبار وعلاقة الإنتاجية للبئر بنصف قطره وبعده عن الكونتور . كذلك فإن قمع انخفاض الضغط في الشكل (٤-١٥) يعتبر صالحاً كذلك من أجل الجريان الارتشاحي المستقر للسائل القابل للانضغاط عند نفس الشروط .

٦-٣-الطرق التقريبية لدراسة الجريانات غير المستقرة للسائل القابل للانضغاط:

إن العمليات غير المستقرة الناتجة عن وضع البئر في الإنتاج أو إيقافه وتغيير سرعة استخراج السائل من البئر ، تظهر في الطبقات أثناء استثمار واستغلال المكامن النفطية والغازية . وتظهر صفة هذه العمليات بمايلي :

١) إعادة توزع الضغط الطبقي .

٢) تغير سرعة الارتشاح مع الزمن .

٣) تغير إنتاجية البئر مع الزمن .

تتعلق خصائص هذه العمليات غير المستقرة بمرونة الطبقات والسوائل المشبعة بها وبالتالي يمكن اعتبار الطاقة الطبقية في هذه العمليات هي طاقة التشوه المرن للسوائل (ماء ، نفط) ولصخور الطبقة .

عندما يكون الضغط الطبقي أعلى من ضغط الإشباع فإنه يمكن اعتبار وجود طور واحد في الطبقة وبالتالي فإن الضغط سيكون متساوياً في أية نقطة من الطبقة .

$P > P_b \Rightarrow P_K = const$

إن حجم السائل المضغوط سيزداد بينما سيتناقص حجم الفراغات المسامية نتيجة تمدد الجزء الصخري للطبقة وذلك عند انخفاض الضغط الطبقي ،وهذا يعطي القدرة على إزاحة السائل من الطبقة إلى البئر . وعلى الرغم من أن عامل التشوه الحجمي المرن للسائل وصخور الطبقة قليل ، إلا أن حجم الطبقة والسوائل المشبعة بها كبير ، وبالتالي فإن حجم السوائل المستخرجة من الطبقة نتيجة ذلك سيكون كبيراً .

يستمر جريان السائل إلى قاع البئر في عدة حالات أخرى تحت تأثير ضغط الماء القادمة من مجال التغذية . ويسمى مثل هذا النظام ـ نظام الدفع المائي المرن الذي يختلف عن نظام الدفع المائي المغلق .

إن قيم الضغط P وكثافة السائل ρ ستكون متساوية في كافة نقاط الطبقة قبل اختراق البئر لها . ولكن وابتداءً من لحظة فتح الطبقة سينتقل هبوط الضغط من البئر إلى كونتور التغذية . وسيتمدد السائل في الطبقة نتيجة لانخفاض الضغط مما يساعد على تدفق النفط من الطبقة وإلى البئر .

يقسم هبوط الضغط في الطبقة إلى مرحلتين :

١) المرحلة الأولى : ازدياد نصف قطر تأثير البئر R_k،أو توسع قمع انخفاض الضغط، وتتميز هذه المرحلة بثبات الضغط على الحدود الخارجية لقمع انخفاض الضغط عند القيمة الأولية المساوية للضغط الطبقي .

٢) المرحلة الثانية : تبدأ من وصول نصف قطر تأثير البئر R_k إلى كونتور التغذية . وإذا كان لدينا نظام الدفع المائي فإنه سيكون لدينا حالتان :

أ) كمية السائل المغذية أقل من كمية السائل المستخرجة وهنا يحدث انخفاض مستمر في الضغط مما يؤدي إلى استنفاذ الطبقة .

ب) كمية السائل المغذية تساوي كمية السائل المستخرجة وهنا يبقى الضغط ثابتاً P_k وبالتالي ستصبح حركة السائل مستقرة ويمكن اعتبار السائل غير قابل للانضغاط ،

وبالتالي يمكن استخدام الحسابات السابقة .

يستغرق استثمار الحقول النفطية فترة طويلة (سنين عديدة) لذلك فإن تغير الإنتاجية والضغط بالعلاقة مع الزمن في الطبقة سيحدث أيضاً ببطء . وهذا مايسمح لنا باستخدام طريقةالتبديل المتتالي للحالة المستقرةمن أجل إجراء الحسابات المخزونية ، بحيث نعتبر أن الإنتاجية وتوزع الضغط في الطبقة خلال فترة زمنية قصيرة نسبياً ثابتان وكأنه ارتشاح منستقر .

فلتعيين إنتاجية البئر وتوزع الضغط في الطبقة على اعتبار أن الارتشاح غير مستقر للسائل القابل للانضغاط كالحالة المستقرة المتتالية يمكننا استعمال المعادلات التي حصلنا عليها في البندين الأول والثاني من هذا الفصل .

يمكن الحصول على المسائل المختلفة المتعلقة بالارتشاح غير المستقر للسائل القابل للانضغاط ضمن الوسط المسامي القابل للانضغاط ، في الطبقة ذات الامتداد المحدود أو غير المحدود ، من خلال مكاملة المعادلات التفاضلية الخطية ، إلاّ أن حل مثل هذه المعادلات يعتبر من الأمور الصعبة ، لذلك فقد تم البحث عن طرق تقريبية لبحث الارتشاح غير المستقر ، وسوف نعرض إحدى هذه الطرق من أجل نوعين من الجريانات غير المستقرة . وتسمى هذه الطريقة بطريقة التبديل المتتالي للحالات المستقرة ، التي تم تطويرها من قبل الباحث تشارني (TSHARNY) ، والتي تستخدم على نطاق واسع في الحسابات العملية .

يعتمد مبدأ هذه الطريقة على " أن الضغط في الطبقة يتغير مع الزمن أقل بكثير من تغيره مع المسافة " ، لذلك فإنه يمكن إهمال مشتق الضغط بالنسبة للزمن وبالتالي يتم الحصول على معادلة لابلاس بالنسبة للضغط التي تعبر عن الحالة المستقرة .

يمكن تجزيء حركة السائل في الطبقة إلى مجالين : الأول مضطرب (متأثر بعمل البئر) والثاني غير مضطرب (غير متأثر بعمل البئر) .

يبدأ المجال الأول من جدران البئر ويكون توزع الضغط وكأن الحركة تتم كجريان مستقر ، والحدود الخارجية لهذا المجال تصل في لحظة معينة إلى كونتور التغذية،أما الضغط في المجال الثاني فيكون ثابتاً ومساوياً للضغط الستاتيكي الأولي.

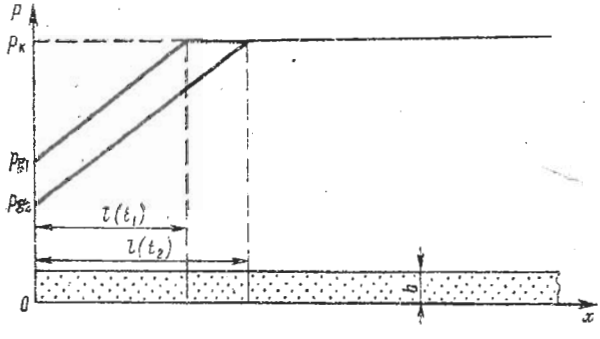
إن تقسيم الجريان الارتشاحي إلى مجال مضطرب وآخر غير مضطرب يؤدي إلى ضرورة بحث عملية إعادة توزع الضغط الطبقي في طورين ، حيث يتم جريان الطور الأول منذ اللحظة الأولى وحتى لحظة وصول المجال المضطرب إلى حدود الطبقة حيث يبدأ عندئذ الطور الثاني . ولكننا أثناء الحسابات النظرية سنفترض أن الطبقة لاحدود لها وبالتالي سنستبعد وجود الطور الثاني . وسنبحث فيما يلي الجريان الأحادي المنتظم والدائري الشعاعي للسائل القابل للانضغاط بناء على طريقة التبديل المتتالي للحالات المستقرة .

٦-٣-١- الجريان الأحادي المنتظم :

سندرس هذا النوع من الجريان عند وجود حالتين :

أ) حالة ثبات الإنتاجية Q :

لنفرض أن لدينا قناة مستقيمة دخلت في اللحظة t = 0 في الإنتاج بإنتاجية Q ثابتة من طبقة أفقية ذات السماكة الثابتة b والعرض B . إن الضغط في الطبقة قبل إدخال هذه الآبار في الإنتاج كان متساوياً في كل نقاط الطبقة ومساوياً P_k . وبعد إدخال الآبار في الإنتاج بزمن t كان قد انزاح المجال المضطرب بمقدار $\ell(t)$ كما في الشكل (٦-١) .



شكل (٦-١) منحنيات توزع الضغط للجريان الأحادي للجريان المنتظم حسب طريقة التبديل المتتالي

إن توزع الضغط في هذا المجال سيعتبر مستقراً (انظر الفقرة " ٤-١ " من الفصل الرابع) ، وبالتالي يمكن كتابة مايلي مع اعتبار أن اتجاه الجريان يعاكس اتجاه المحور x كما في الشكل (٤-١-b) :

$$P(x,t) = P_k - \frac{Q.\mu}{k\,B\,b}\left[\ell(t) - x\right] : 0 \le x \le \ell(t) \qquad (٣٢-٦)$$

والمطلوب إيجاد قانون انتقال حدود المجال المضطرب التي تبعد بمقدار $\ell(t)$ عن القناة إن كمية السائل المصروفة Q خلال فترة زمنية dt تساوي تغير احتياطي السائل المضغوط في المجال المضطرب من الطبقة خلال الزمن نفسه ، ويعبر عن ذلك بالمعادلة التالية :

$$Q = \beta^* \frac{d}{dt}\left[V(t) \cdot \Delta P\right] \qquad (٣٣-٦)$$

حيث إن : β^* ـ معامل السعة المرنة للطبقة . ويعبر عن تغير احتياطي السائل المضغوط في واحدة الحجم من الطبقة عندتغير الضغط الطبقي بمقدار واحدة الضغط ،

$V(t)$ ـ حجم المجال المضطرب من الطبقة ويعطى بالمعادلة التالية :

$$V(t) = B\,b\,\ell(t) \qquad (٣٤-٦)$$

أما فرق الضغط فيحسب كمايلي :

$$\overline{\Delta P} = P_k - \tilde{P} = P_k - \frac{P_k + P_g}{2} = \frac{P_k - P_g}{2} \qquad (٣٥-٦)$$

حيث إن : $\tilde{P}$ ـ الضغط الوسطي في الطبقة ككل .

ففي اللحظة الأولى $t = 0$ فإن $P(x,t) = P_g(t)$،وبالتعويض في المعادلة(٦-٣٢) نحصل على:

$$Q = \frac{k}{\mu}\,\frac{P_k - P_g}{\ell}\,B\,.\,b \qquad (٣٦-٦)$$

نعوض المعادلتين (٦-٣٤) ، (٦-٣٦) في المعادلة (٦-٣٣) فنجد :

$$Q = \beta^* \frac{d}{dt}\left(B\,b\,\ell\,.\,\frac{Q\,\mu\,\ell}{2\,k\,B\,b}\right) \qquad (٣٧-٦)$$

لنفرض أن : $\chi = \dfrac{k}{\mu\,\beta^*}$

وبالتالي يمكن أن نحصل على : $d\ell^2 = 2\chi\, dt$

وبإجراء التكامل نحصل على العلاقة التي تحدد المجال المضطرب في أية لحظة :

$$\ell(t) = \sqrt{2\chi t} \qquad (٣٨-٦)$$

نعوض هذه المعادلة في المعادلة (٣٢-٦) فنحصل على معادلة توزع الضغط في الطبقة :

$$P(x,t) = P_k - \frac{Q.\mu}{kBb}\left(\sqrt{2\chi t} - x\right);\ 0 \le x \le \sqrt{2\chi t} \qquad (٣٩-٦)$$

وفي المجال غير المضطرب ، أي عندما $x > \sqrt{2\chi t}$ تصبح العلاقة على الشكل التالي :

$$P(x,t) = P_k \qquad (٤٠-٦)$$

لقد قورنت قيمة فارق الضغط $(P_k - P_g)$ المحسوبة بهذه الطريقة مع طريقة حسابها بالطرق الدقيقة فكان الخطأ 25% .

ب) حالة ثبات ضغط القناة P_g:

لنفرض أن لدينا قناة مستقيمة دخلت في الإنتاج عند ضغط ثابت للقاع في اللحظة $t = 0$ ، $P_g = const$ ، والمطلوب تحديد توزع الضغط وقانون حركة حدود المجال المضطرب $\ell(t)$ وتغير إنتاجية القناة مع الزمن $Q(t)$. تعطى إنتاجية القناة في ظروف الحركة المستقرة بالمعادلة التالية :

$$Q(t) = \frac{k}{\mu}\,\frac{P_k - P_g}{\ell(t)}\,Bb = \frac{k}{\mu}Bb\,\frac{\partial P}{\partial x}\Big|_{x=0} \qquad (٤١-٦)$$

وباتباع الطريقة نفسها التي استخدمت في الفقرة السابقة مع الأخذ بعين الاعتبار ثبات الضغط ($\Delta P = const$) لذلك تكتب المعادلة (٣٣-٦) بالشكل التالي :

$$Q = \beta.\,\Delta P\,\frac{dV(t)}{dt} \qquad (٤٢-٦)$$

وبالتالي يمكن الحصول على قانون حركة حدود المجال المضطرب كمايلي :

$$\ell\, d\ell = 2\chi t$$

أو :

$$\ell(t) = 2\sqrt{\chi t} \qquad (٤٣-٦)$$

وبتعويض المعادلات (٦-٤١) ، (٦-٤٢) في المعادلة (٦-٣٢) نحصل على قانون توزع الضغط في المجال المضطرب :

$$P(x,t) = P_k - (P_k - P_g)\left(1 - \frac{x}{2\sqrt{\chi t}}\right) : 0 \le x \le 2\sqrt{\chi t} \qquad (٦-٤٤)$$

وتصبح المعادلة على الشكل التالي عندما يكون $x > 2\sqrt{\chi t}$:

$$P(x,t) = P_k$$

أما إنتاجية القناة فتحسب بعد تعويض $\ell(t)$ في المعادلة (٦-٤١) :

$$Q(t) = \frac{k}{\mu} \frac{P_k - P_g}{2\sqrt{\chi t}} Bb \qquad (٦-٤٥)$$

إن الخطأ بحساب الإنتاجية في المعادلة (٦-٤٥) بالمقارنة مع استخدام الطرق الدقيقة لايتجاوز ١١٪ .

ولدى تحليل المعادلات من أجل الجريان الأحادي المنتظم يمكن صياغة الإستنتاجات التالية :

١) إن الضغط في اللحظة الأولى $t = 0$ سيكون مساوياً لضغط القناة :

$$P(x,t) = P_g$$

٢) يصبح الضغط مساوياً للضغط الطبقي الأولي $P(x,t) = P_k$ عند حدود المجال المضطرب $\ell(t) = \sqrt{2\chi t}$ أو $\ell(t) > 2\sqrt{\chi t}$.

٣) إن علاقة الضغط بالمسافة (x) حسب المعادلة (٦-٣٢) ، علاقة خطية ، وبالتالي فإن منحني انخفاض الضغط سيكون خطاً مستقيماً يبدأ عند القيمة P_k وينتهي عند ضغط القناة P_g حسب الشكل (٦-١) .

٤) عند ثبات الإنتاجية يجب أن يتغير فرق الضغط $(P_k - P_g)$ لذلك يجب أن يتناقص ضغط قاع القناة فمن أجل تغير في الزمن t_1 إلى t_2 سينخفض ضغط القناة من P_{g_1} إلى P_{g_2} وذلك حسب الشكل (٦-١) .

٥) عند ثبات ضغط قاع القناة فإن الإنتاجية ستتناقص مع الزمن حسب المعادلة

(٦-٤٥) ، حيث إن هذا الانخفاض في الإنتاجية غير خطي بالعلاقة مع الزمن .

٦-٣-٢- الجريان الدائري الشعاعي :

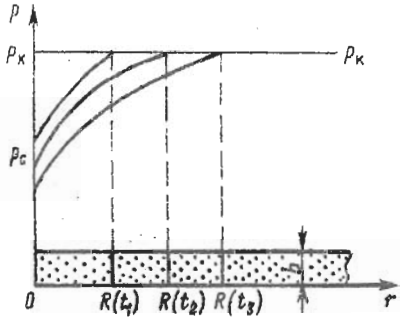
أ) حالة ثبات الإنتاجية :

لندخل البئر ذا نصف القطر R_c في الإنتاج في اللحظة $t = 0$ من طبقة أفقية لاحدود لها ذات سماكة ثابتة b ، ولتكن إنتاجية هذا البئر ثابتة $Q = cons\ t$. إن الضغط في الطبقة ككل قبل دخول البئر في الإنتاج ثابتاً وقيمته P_k. وحسب طريقة التبديل المتتالي للحالات المستقرة وبعد فترة t من دخول البئر في الإنتاج يتشكل مجال مضطرب ذو نصف قطر $R(t)$ والذي يكون فيه توزع الضغط حسب القانون التالي:

$$P(r,t) = P_k - \frac{Q.\mu}{2\pi kb} \ell n \frac{R(t)}{r} \qquad (٦-٤٦)$$

أما في الجزء الباقي من الطبقة فإن الضغط سيبقى ثابتاً ومساوياً للضغط الطبقي الأولي P_k. والمطلوب ايجاد قانون حركة حدود المجال المضطرب بالعلاقة مع الزمن $R(t)$ إن الشكل (٦-٢) يوضح توزع الضغط في هذا النوع من الجريان . ومن الواضح أنه يمكن تعيين إنتاجية البئر بالعلاقة المشابهة لعلاقة ديوبي :

$$Q = \frac{2\pi kb}{\mu} \frac{P_k - P_c(t)}{\ell n \frac{R(t)}{R_c}} \qquad (٦-٤٧)$$



شكل (٦-٢) منحني توزع الضغط في المجال المضطرب من الطبقة

يمكن حساب الإنتاجية بالمعادلة (٦-٣٣) ، ولكن حجم المجال المضطرب يحسب كما يلي :

$$V(t) = \pi\left(R^2(t) - R_c^2\right) b \qquad (٦-٤٨)$$

أما فرق الضغط الوسطي فيعطى بالمعادلة (٦-٣٥) ولكن :

$$\tilde{P} = P_k - \frac{P_k - P_e}{2\,\ell n \dfrac{R(t)}{R_c}} \qquad (٦-٤٩)$$

ومنه يمكن كتابة ما يلي :

$$\overline{\Delta P} = P_k - \tilde{P} = \frac{P_k - P_e}{2\,\ell n \dfrac{R(t)}{R_c}} = \frac{Q\mu}{4\pi kb} \qquad (٦-٥٠)$$

نعوض المعادلتين (٦-٤٨) ، (٦-٥٠) في المعادلة (٦-٣٣) فنحصل على معادلة حركة حدود المجال المضطرب كما يلي :

$$4\,\chi\,dt = d\left(R^2(t) - R_c^2\right) : \chi = \frac{k}{\mu\,\beta^*} \qquad (٦-٥١)$$

وبإجراء التكامل لهذه المعادلة نحصل على :

$$R(t) = \sqrt{R_c^2 + 4\chi t} \qquad (٦-٥٢)$$

وبتعويض المعادلة (٦-٥٢) في المعادلة (٦-٤٦) نحصل على معادلة توزع الضغط في الطبقة في أية لحظة t :

$$P(r,t) = P_k - \frac{Q.\mu}{2\,\pi\,kb}\,\ell n\,\frac{\sqrt{R_c^2 + 4\chi t}}{r} \qquad (٦-٥٣)$$

حيث إن :

$$R_c < r \le \sqrt{R_c^2 + 4\chi t}$$

وعندما يصبح $r > \sqrt{R_c^2 + 4\chi t}$ فإن الضغط يصبح مساوياً للضغط الطبقي الأولي:

$$P(r,t) = P_k \qquad (٦-٥٤)$$

إن فرق الضغط مابين قاع البئر وأية نقطة من الطبقة تعطى بالمعادلة :

$$\Delta P_c \equiv P_k - P_c(t) = \frac{Q.\mu}{2\pi kb}\,\ell n\,\frac{\sqrt{R_c^2 + 4\chi t}}{R_c} \qquad (٦-٥٥)$$

وبتعويض المعادلة (٦-٥٢) في المعادلة (٦-٤٧) نحصل على معادلة حساب الإنتاجية :

$$Q = \frac{2\pi kb}{\mu} \cdot \frac{P_i - P_c(t)}{\ln \frac{\sqrt{R_c^2 + 4\chi t}}{R_c}} \qquad (٦-٥٦)$$

وبمقارنة المعادلة (٦-٥٥) بالمعادلة المماثلة لدى استخدام الطرق الدقيقة نجد أن نسبة الخطأ تتناقص مع الزمن وتكون 10,6% إذا كان $f_o = 100$ وتصبح 7,5% عندما $f_o = 10^3$ ، 5,7% عندما $f_o = 10^4$.

حيث إن : $f_o = \frac{\chi t}{R_c^2}$

ب) حالة ثبات ضغط قاع البئر P_c :

إن قانون حركة حدود المجال المضطرب لجريان السائل الدائري الشعاعي إلى البئر الداخل في الإنتاج عندما يكون ضغط القاع ثابتاً ، سيكون مشابهاً لنفس القانون عندما تكون الإنتاجية ثابتة وذلك لأنه كما رأينا أن قيمة $\overline{\Delta P}$ لاتتعلق بنصف القطر $R(t)$ وبالتالي فإن قيمة (t) R لن تتغير في هذه الحالة . فمن المعادلة (٦-٥٢) يمكن الحصول على :

$$\frac{R(t)}{R_c} = \sqrt{1 + \frac{4\,k}{\mu\,\beta^* \cdot R_c^2} \cdot t} \qquad (٦-٥٧)$$

ولنفرض أن :

$$\tau = \frac{2}{\mu\,\beta^* \cdot R_c^2} \cdot t$$

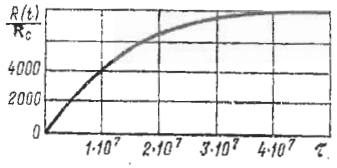
حيث إن τ ـ عامل دون واحدة قياس .

وبالتالي :

$$\frac{R(t)}{R_c} = \sqrt{1 + 2\tau} \qquad (٦-٥٨)$$

ولقد عبر عن هذه المعادلة بالمنحني $\frac{R(t)}{R_c} = f(\tau)$ الموضح بالشكل (٦-٣) ،

والذي يمكن من خلاله حساب حركة حدود المجال المضطرب في هذه الحالة .



شكل (٦-٣) علاقة نصف قطر المجال المضطرب $\frac{R(t)}{R_c}$ بمعامل الزمن τ

عند ثبات ضغط قاع البئر $P_c = const$.

كذلك يمكننا استخدام المعادلة (٦-٥٣) من أجل توزع الضغط . أما إنتاجية البئر فيمكن حسابها بمعادلة ديوبي (٦-٥٦) عندما يكون $P_c = cons\,t$ والخطأ في حساب الإنتاجية لايتجاوز 5% عنه أثناء استخدام الطرق الدقيقة في الحساب .

إن تحليل دراسة الجريان غير المستقر الدائري الشعاعي يمكننا من صياغة الاستنتاجات التالية :

١) في اللحظة $t = 0$ يكون $r = R_c$ وبالتالي يكون الضغط مساوياً لضغط القاع $P(r,t) = P_c$.

٢) في اللحظة t وعندما يصبح $r > \sqrt{R_c^2 + 4\chi t}$ وبعد التعويض في المعادلة (٦-٥٣) يمكننا الحصول على قيمة الضغط الذي يصبح مساوياً للضغط الطبقي الأولي،أي أن :

$$P(r,t) = P_k$$

٣) إن علاقة الضغط بنصف القطر r حسب المعادلة (٦-٥٣) ضمن المجال المضطرب هي علاقة لوغارتمية وبالتالي فإن منحني توزع الضغط سيكون منحنياً يتناقص ميله تدريجياً حتى ينعدم عندما يصبح $r = \sqrt{R_c^2 + 4\chi t}$.

٤) يمكن استخدام المعادلة (٦-٥٦) من أجل حساب إنتاجية البئر في أية لحظة ، عند ثبات الإنتاجية أو عند ثبات ضغط قاع البئر P_c وذلك لأن قيمة R(t) متساوية في الحالتين . ففي الحالة الأولى ولكي تبقى الإنتاجية ثابتة فإن فرق الضغط يجب أن تتغير

أي أن ضغط قاع البئر سيتغير .أما في الحالة الثانية وعندما يكون $P_c = cons\,t$ فإن إنتاجية البئر يجب أن تتغير مع الزمن ، وتغير الإنتاجية هذا له علاقة لوغارتمية .

وأخيراً يجب الإشارة إلى أنه كما في الجريان الأحادي المنتظم كذلك في الجريان الدائري الشعاعي فإن تدرج الضغط يبدي تغيراً مفاجئاً عند الانتقال من المجال المضطرب إلى المجال غير المضطرب ، أي أن لمنحني توزع الضغط انكساراً مفاجئاً في هذه المنطقة والذي يعتبر أحد أسباب اختلاف الحسابات بهذه الطريقة عنها في الطرق الدقيقة . ولكن تعتبر هذه الطريقة فعالة بشكل كاف ، حيث إنها تعطينا الحلول المبسطة ، التي تستخدم ليس فقط عند ارتشاح طور واحد ، بل أيضاً لدى حركة السوائل الحاوية على الغازات . كذلك تستخدم من أجل دراسة حركة الحد الفاصل مابين السوائل والغازات .